Exo 4 : on considère le référentiel terrestre $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de centre $O$ sur la Grand Place de Bruxelles, $\vec{u}_x$ pointant vers l'Est, $\vec{u}_y$ vers le Nord, et $\vec{u}_z$ vertical vers le haut.

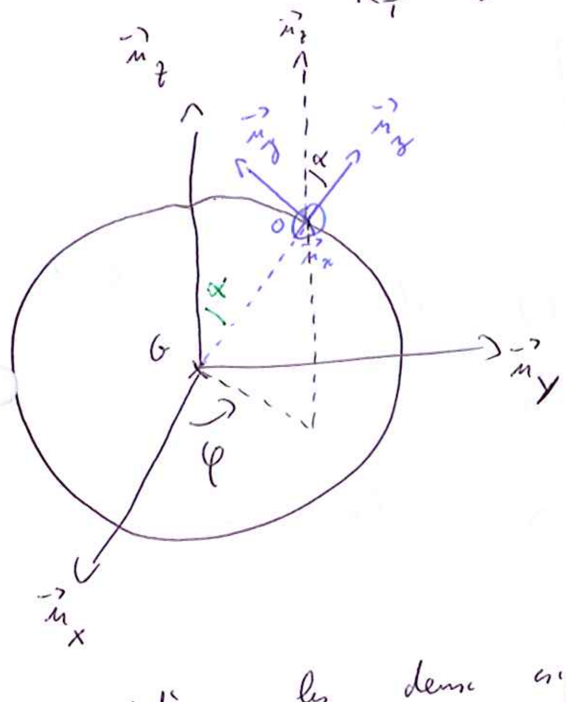
4₁

On considèrera également un référentiel inertiel fixe $(G, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ de centre $G$ le centre de la Terre, et d'axe $\vec{u}_Z$ autour duquel la Terre est en rotation. Soit donc $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotat° de la Terre, on a

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_Z \quad , \quad \Omega \simeq 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

On dénotera typiquement $R_T$ le rayon de la Terre, avec

$$R_T \simeq 6300 \text{ km}$$




L'angle $\alpha$ pour la Grand Place de Bruxelles vaut

$$\alpha \simeq 39{,}15^\circ = 0{,}68335 \text{ rad}$$

On considère les deux expériences :

i) on tire de $O$ un boulet de canon, $\perp$ à la surface de la Terre, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$. On appelle $h$ la hauteur maximale atteinte par le boulet, de masse $m$ ;

ii) on lâche, à une hauteur $h$ juste au dessus de $O$, une boule, de masse $m'$, sans vitesse initiale.

On repèrera typiquement dans la suite les grandeurs associées à l'expérience i) (resp ii)) par un indice 1 (resp 2).

1) On suppose que le référentiel terrestre $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est inertiel

Pour l'exp i) : soit $z_1(t)$ la position, selon $\vec{u}_z$, du boulet à l'instant $t$, on a

NEWTON :
$$m\ddot{z}_1 = -mg$$

d'où
$$z_1(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

soit, avec les conditions initiales $z_0 = 0$ et $\dot{z}_0 = v_0$,

$$\boxed{z_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

Soit $t_h$ l'instant auquel le boulet atteint sa hauteur maximale $h$, on doit donc avoir

$$\dot{z}(t_h) = 0 = v_0 - g t_h \Rightarrow t_h = \frac{v_0}{g}$$

Or puisque $z(t_h) = h$, on tire

$$z(t_h) = h = v_0 t_h - \frac{g t_h^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

d'où la vitesse initiale

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

AN : pour $h = 100$ m $= 0,1$ km , $g = 9,81$ m/s$^2$ , on a (4$_2$)

↓
Application Numérique

$$\begin{cases} v_0 \simeq 44,3 \text{ m/s} \\ v_0 \simeq 160 \text{ km/h} \end{cases}$$

Soit maintenant $t^*$ le moment où le boulet retombe par terre, on doit donc avoir $z_1(t^*) = 0$ , ie

$$z_1(t^*) = v_0 t^* - \frac{g t^{*2}}{2} = t^*\left(v_0 - \frac{g t^*}{2}\right) = 0$$

d'où

$$\boxed{t^* = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

AN : pour $h = 100$ m ,

$$t^* \simeq 9 \text{ s}$$

Pour l'exp ii) : soit $z_2(t)$ la position, selon $\vec{u}_z$, de la boule à l'instant $t$, on a encore ici

$$z_2(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

avec cette fois les conditions initiales $z_0 = h$ et $\dot{z}_0 = 0$ , d'où

$$\boxed{z_2(t) = h - \frac{g t^2}{2}}$$

Soit $t_{ch}$ le temps de chute de la boule, on doit donc avoir $z_2(t_{ch}) = 0$ , soit

$$z_2(t_{ch}) = h - \frac{g t_{ch}^2}{2} = 0$$

et donc

$$\boxed{t_{ch} = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

La vitesse de la boule à l'impact est donc donnée par

$$\dot{z}_2(t_{ch}) = -g t_{ch} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{z}_2(t_{ch}) = -\sqrt{2gh}}$$

<u>AN</u> : pour $h = 100$ m, $t_{ch} \simeq 4,5$ s et $\dot{z}_2(t_{ch}) \simeq -44,3$ m/s

## 2) a) <u>Variation du champ de gravitation</u>

La force de gravitation $\vec{F}_r$ pour un objet à distance $r$ du centre de la Terre est de module

$$|\vec{F}_r| = G \frac{M_T m}{r^2}$$

où $M_T$ est la masse de la Terre et $m$ la masse de l'objet.
On définit alors $g$, l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, comme

$$g \equiv \frac{GM_T}{R_T^2}$$

puisqu'à la surface, un objet se trouve à une distance $R_T$ du centre de la Terre, de sorte que l'on a alors simplement

$$|\vec{F}_{R_T}| = mg$$

Soit maintenant $g(r)$ l'accélération de la pesanteur à une distance $r$ arbitraire du centre de la Terre, ie

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

Considérons maintenant un objet (typiquement : le boulet de canon ou la boule) se trouvant à une altitude $z$ au-dessus de la surface de la Terre, il est soumis à l'accélération de la pesanteur $g(R_T+z)$, ie (4₃)

$$g(R_T+z) = \frac{GM_T}{(R_T+z)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\frac{1}{(1+z/R_T)^2}$$

Or, de 1), on voit que les hauteurs typiques que l'on considère sont de l'ordre de $z = h = 100$ m, et on a

$$\boxed{\frac{h}{R_T} \approx \frac{0,1}{6300} \approx 1,6 \cdot 10^{-5}}$$

On effectue donc un développement de Taylor de $g(R_T+z)$, au 1er ordre, en reconnaissant $g \equiv GM_T/R_T^2$, et on a

$$g(R_T+z) = g\left(1 - 2\frac{z}{R_T} + O\left[(z/R_T)^2\right]\right)$$

où, dans nos expériences, la correction $z/R_T$ sera d'un ordre maximal pr $z = h = 100$ m (la hauteur maximale que l'on considère), avec $h/R_T \sim 10^{-5}$

CONCLUSION : les variations du champ de gravitation peuvent donc clairement être négligées dans notre problème.

# Variation du champ de force d'inertie d'entraînement

Supposons qu'un objet de masse $m$ se trouve en un point $A$, avec

$$\vec{OA} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

par rapport à l'origine du référentiel terrestre. La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e$ est alors donnée par

$$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e$$

où $\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement donnée par

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{GA})$$

que l'on peut donc écrire comme

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{GO} + \vec{\Omega} \times \vec{OA}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{GO}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{OA})$$

soit

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{(0)} + \vec{a}_e^{(1)}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{a}_e^{(0)} \equiv \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{GO}) \\ \vec{a}_e^{(1)} \equiv \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{OA}) \end{cases}$$

On rappelle que dans le référentiel fixe $(G, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$,

$$\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_Z$$

et les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont donnés par

$$\begin{cases} \vec{u}_x = -\sin\varphi\,\vec{u}_X + \cos\varphi\,\vec{u}_Y \\ \vec{u}_y = -\cos\alpha\cos\varphi\,\vec{u}_X - \cos\alpha\sin\varphi\,\vec{u}_Y + \sin\alpha\,\vec{u}_Z \\ \vec{u}_z = \sin\alpha\cos\varphi\,\vec{u}_X + \sin\alpha\sin\varphi\,\vec{u}_Y + \cos\alpha\,\vec{u}_Z \end{cases}$$

NB : en effet, les $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ peuvent simplement être vus comme les vecteurs de base en coordonnées cylindriques : $\vec{u}_z = \vec{u}_r$, $\vec{u}_y = -\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_x = \vec{u}_\varphi$. (4)

On a donc pour $\vec{a}_e^{(0)}$, puisque $\vec{GO} = R_T \vec{u}_z$,

$$\vec{a}_e^{(0)} = R_T \Omega^2 \vec{u}_Z \times (\vec{u}_Z \times \vec{u}_z)$$

ie

$$\boxed{\vec{a}_e^{(0)} = -R_T \Omega^2 \sin\alpha \left( \cos\varphi \, \vec{u}_X + \sin\varphi \, \vec{u}_Y \right)}$$

et pour $\vec{a}_e^{(1)}$,

$$\vec{a}_e^{(1)} = \Omega^2 \vec{u}_Z \times \left[ \vec{u}_Z \times ( x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z ) \right]$$

ie

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_e^{(1)} = \Omega^2 \Big\{ & ( x \sin\varphi + y \cos\alpha \cos\varphi - z \sin\alpha \cos\varphi ) \, \vec{u}_X \\ & + ( -x \cos\varphi + y \cos\alpha \sin\varphi - z \sin\alpha \sin\varphi ) \, \vec{u}_Y \Big\}\end{aligned}}$$

Or, pour des expériences du type i) ou ii) où l'on considère des positions $x, y, z$ typiquement de l'ordre de la dizaine ou centaine de mètres, ie de l'ordre de $h = 100\,\text{m}$, on a (avec $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi \sim 1$)

$$|\vec{a}_e^{(0)}| \sim R_T \Omega^2 \qquad \text{et} \qquad |\vec{a}_e^{(1)}| \sim h \Omega^2$$

On a donc

$$\frac{|\vec{a}_e^{(1)}|}{|\vec{a}_e^{(0)}|} \sim \frac{h\cancel{\Omega^2}}{R_T\cancel{\Omega^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{|\vec{a}_e^{(1)}|}{|\vec{a}_e^{(0)}|} \sim \frac{h}{R_T} \approx 10^{-5}}$$

Ainsi, la contribution de $\vec{a}_e^{(1)}$ à $\vec{a}_e$ peut donc être négligée devant la contribution de $\vec{a}_e^{(0)}$, et l'erreur faite en écrivant simplement $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{(0)}$ et de l'ordre de $h/R_T$, ie du même ordre que l'erreur faite en négligeant la variation du champ de gravitation.

Dans le cadre de cette approximation, on a donc

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{(0)} = -R_T\Omega^2 \sin\alpha \left(\cos\varphi\,\vec{u}_x + \sin\varphi\,\vec{u}_y\right)$$

que l'on peut également écrire dans le référentiel terrestre comme

$$\vec{a}_e = -R_T\Omega^2 \sin\alpha\left(-\cos\alpha\,\vec{u}_y + \sin\alpha\,\vec{u}_z\right)$$

Au final, on a donc la force d'inertie d'entraînement

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\vec{a}_e \\ &= -mR_T\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}_y + mR_T\Omega^2\sin^2\alpha\,\vec{u}_z\end{aligned}}$$

b) On voit donc que $\vec{F}_e$ a une composante selon $\vec{u}_z$, qui peut donc être vue comme une modification de la pesanteur $g$. Comparons donc ces deux contributions, où la contribution du poids est $mg$ :

$$\frac{\vec{u}_z \cdot \vec{F}_e}{mg} = \frac{\cancel{m} R_T \Omega^2 \sin^2\alpha}{\cancel{m} g} \equiv \gamma$$

soit, avec les valeurs numériques,

$$\gamma \simeq \frac{6{,}3 \cdot 10^6 \times 7{,}29^2 \cdot 10^{-10} \times \sin^2(0{,}68335)}{9{,}81}$$

et on trouve

$$\frac{R_T \Omega^2 \sin^2\alpha}{g} \simeq 1{,}36 \cdot 10^{-3}$$

<u>Conclusion</u> : la modification de la pesanteur due à $\vec{F}_e$ est donc négligeable, et de l'ordre de $10^{-3}$.

c) On calcule maintenant la force de Coriolis $\vec{F}_c$, donnée par

$$\vec{F}_c = -m\,\vec{a}_c$$

où l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$ est donnée par

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

avec

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

dans le référentiel terrestre. Tous calculs faits, on trouve

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\Omega\left(\dot{z}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha\right)\vec{u}_x + 2\Omega\,\dot{x}\cos\alpha\,\vec{u}_y - 2\Omega\,\dot{x}\sin\alpha\,\vec{u}_z}$$

soit pour $\vec{F}_c$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_c = \ & 2m\Omega(\dot{y}\cos\alpha - \dot{z}\sin\alpha)\vec{u}_x \\ & -2m\Omega\dot{x}\cos\alpha\,\vec{u}_y + 2m\Omega\dot{x}\sin\alpha\,\vec{u}_z\end{aligned}}$$

On voit donc que pour la direction Nord-Sud, ie selon $\vec{u}_y$, on a une composante venant de $\vec{F}_c$ et une venant de $\vec{F}_c$. On veut donc évaluer le rapport

$$\Gamma \equiv \frac{\vec{u}_y \cdot \vec{F}_c}{\vec{u}_y \cdot \vec{F}_e} = \frac{2\cancel{m}\Omega\dot{x}\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{m}R_T\Omega^2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}$$

On (cf équation du mouvement plus loin), on peut écrire

$$\dot{x} = 2\Omega(y\cos\alpha - z\sin\alpha)$$

d'où

$$\Gamma = \frac{4\cancel{\Omega^2}(y\cos\alpha - z\sin\alpha)}{R_T\cancel{\Omega^2}\sin\alpha} \sim \frac{y}{R_T} - \frac{z}{R_T}$$

soit donc encore

$$\frac{\vec{u}_y \cdot \vec{F}_c}{\vec{u}_y \cdot \vec{F}_e} \sim \frac{h}{R_T} \sim 10^{-5}$$

Conclusion : toute déviation dans la direction Nord-Sud est donc dominée par la force d'inertie d'entraînement.

2) Puisque seule la force de Coriolis $\vec{F}_c$ a une composante selon $\vec{u}_x$, toute déviation dans la direction Est-Ouest sera donc dominée par cette force de Coriolis. 4/6

3) La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est donc

$$m\vec{a} = m\left(\ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z\right) = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

et on tire donc des résultats précédents les équations

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\,\dot{y}\cos\alpha - 2\Omega\,\dot{z}\sin\alpha \\ \ddot{y} = -R_T\,\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega\,\dot{x}\cos\alpha \\ \ddot{z} = -g + R_T\,\Omega^2\sin^2\alpha + 2\Omega\,\dot{x}\sin\alpha \end{cases}$$

4) Des résultats de la question 2), on tire l'équation simplifiée pour $\ddot{z}$ (en gardant uniquement le terme dominant)

$$\ddot{z} = -g$$

Ainsi, pour l'expérience i), on a toujours (cf question 1))

$$\boxed{z_1(t) = v_0 t - \frac{g t^2}{2}}$$

et pour l'expérience ii), on a encore

$$\boxed{z_2(t) = h - \frac{gt^2}{2}}$$

On intègre maintenant l'équation ci-dessus pour $\ddot{x}$ et on trouve (puisque $\Omega$ et $\alpha$ sont indépendants du temps)

$$\dot{x} = 2\Omega\, y(t) \cos\alpha - 2\Omega\,(z(t) - z_0) \sin\alpha$$

Hypothèse : on s'attend à avoir de petites déviations selon $\vec{u}_y$, négligeables devant la hauteur $h$. On néglige donc $y(t)$ devant $z(t)$, et on a donc pour $\dot{x}$

$$\dot{x} \approx -2\Omega\,(z(t) - z_0) \sin\alpha$$

Pour l'exp i) : on a dans ce cas $z_0 = 0$, d'où

$$\dot{x}_1(t) = -2\Omega\, z_1(t) \sin\alpha = -2\Omega\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) \sin\alpha$$

et donc, en intégrant et avec $x_1(0) = 0$,

$$\boxed{x_1(t) = -\Omega \sin\alpha \left(v_0 t^2 - \frac{gt^3}{3}\right)}$$

Pour l'exp ii) : on a cette fois $z_2(t) - z_0 = h - \frac{gt^2}{2} - h$, soit

$$\dot{x}_2 = \Omega\, g t^2 \sin\alpha$$

et donc (ici aussi $x_2(0) = 0$)

$$\boxed{x_2(t) = \frac{\Omega g}{3} t^3 \sin\alpha}$$

Enfin, on peut maintenant résoudre la dernière équation du mouvement (ie pour $y$), soit

$$\ddot{y} = -R_T \Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega \dot{x}\cos\alpha$$

d'où en intégrant (et avec $x(0) = 0$ dans les deux expériences, ainsi que $\dot{y}(0) = 0$)

$$\dot{y} = -R_T \Omega^2 t \sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega\, x(t) \cos\alpha$$

et enfin (puisque $y(0) = 0$ dans les deux expériences)

$$y(t) = -\frac{R_T\Omega^2}{2} t^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega\cos\alpha \int_0^t dt'\, x(t')$$

Pour l'exp i) : $y_1(t) = -\frac{R_T\Omega^2}{2} t^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega\cos\alpha \int_0^t dt'\, x_1(t')$

soit, avec $x_1(t)$ que l'on a ci-dessus,

$$\boxed{y_1(t) = -\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \left[ \frac{R_T}{2} t^2 - \frac{2v_0}{3} t^3 + \frac{g}{6} t^4 \right]}$$

Pour l'exp ii) : $y_2(t) = -\frac{R_T\Omega^2}{2} t^2 \sin\alpha\cos\alpha - 2\Omega\cos\alpha \int_0^t dt'\, x_2(t')$

soit, avec $x_2(t)$ que l'on a ci-dessus,

$$\boxed{y_2(t) = -\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha \left[ \frac{R_T}{2} t^2 + \frac{g}{6} t^4 \right]}$$

On peut maintenant utiliser les résultats obtenus à la question 1) (puisqu'ici la dynamique selon l'axe $\vec{u}_y$ est exactement la même qu'en 1)) concernant

i) l'instant $t^* = 2v_0/g$ où le boulet retombe sur le sol, et

ii) l'instant $t_{ch} = \sqrt{2h/g}$ où la boule atteint le sol

afin de calculer la position du point d'impact O' dans les deux cas i) et ii)

<u>Pour l'exp i)</u> : les coordonnées $x'_1$ et $y'_1$ de O' selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ dans ce cas sont

$$x'_1 = x_1(t^*) = \ldots$$

$$y'_1 = y_1(t^*) = \ldots$$

<u>Pour l'exp ii)</u> : les coordonnées $x'_2$ et $y'_2$ de O' dans ce cas sont

$$x'_2 = x_2(t_{ch}) = \ldots$$

$$y'_2 = y_2(t_{ch}) = \ldots$$